לוגיקה (1) פתרון תרגיל 12

.1

(א) הוכחה באינדוקציה (על המספרים הטבעיים). תהי $\phi' \in \Gamma$ מהצורה המו-פיעה בשאלה. עלינו להראות $\mathbb{N} \models \phi'$. יהיו $b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$ (נשתמש בסימן $\mathbb{N}$ לסימון הן של המודל של הטבעיים והן של העולם של הטבעי-ים (כמקובל)). נניח שהרישא של הפסוק ϕ' מתקיימת כלומר שמתקיים: $\mathbb{N} \models \phi(0, b_1, ..., b_n)$ וכן $\mathbb{N} \models \forall x(\phi(x, b_1, ..., b_n) \to \phi(S(x), b_1, ..., b_n))$. כעת נתבונן בקבוצה $A = \{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \phi(k, b_1, ..., b_n)\}$. לפי הנחותינו זו קבוצה אינדוקטיבית ($0 \in A$ ו-$k \in A \Rightarrow k+1 \in A$) לכן לפי משפט האינדוקציה (בטבעיים) $A = \mathbb{N}$ כלומר מתקיים: $\mathbb{N} \models \forall x(\phi(x, b_1, ..., b_n))$ ולכן $\mathbb{N} \models \phi'$ כנדרש.

(ב) נתבונן בהעשרה של $\mathbb{N}$ ע"י איבר פורמלי a, כלומר במבנה $\mathfrak{A}$ שעולמו $\mathbb{N} \cup \{a\}$ (ראה גם פתרון תרגיל 11 שאלה 1 (ii)), ונגדיר: לכל $n \in \mathbb{N}$: $n +^{\mathfrak{A}} a = a +^{\mathfrak{A}} n = a +^{\mathfrak{A}} a = a$, לכל $\mathbb{N} \ni n \geq 1$: $n *^{\mathfrak{A}} a = a *^{\mathfrak{A}} n = a *^{\mathfrak{A}} a = a$ וכן $0 *^{\mathfrak{A}} a = 0$ ו-$a +^{\mathfrak{A}} 0 = a$. ודאו שזהו מודל לאקסיומות שבו 0 ו-a לא מתחלפים בכפל.

(ג) במודל שהוגדר בסעיף הקודם a הוא איבר מירבי.

(ד) תבנית הוכחה. ראשית השתמשו בפסוק: $\phi_1 = \phi_1(x) = x + 0 \approx 0 + x$ ובפסוק המתאים $\phi'_1 \in \Gamma$ (נסחו אותו) בכדי להוכיח כי במודל ל-Γ, 0 מתחלף בחיבור עם כל איבר (השתמשו באקסיומות (ג) ו-(ד)). שנית השתמשו בפסוק $\phi_2 = \phi_2(x, y) = x + y \approx y + x$ ובפסוק המתאים $\phi'_2 \in \Gamma$ כדי להוכיח כי כל זוג איברים מתחלפים בחיבור.

.2

(א)

i. $\exists x_1 x_2 x_3 [\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \not\approx x_j \wedge \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq 3} y \approx x_i]$.

ii. $\psi_1 = \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq 3} (f(x_i) \approx x_j)^{val(\mathfrak{A}, s, f(x_i) \approx x_j)}$ כאשר $s = \binom{x_1, x_2, x_3}{b_1, b_2, b_3}$.

iii. $\psi_2 = \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq 3} (r(x_i, x_j))^{val(\mathfrak{A}, s, r(x_i, x_j))}$.

iv. $\psi_3 = \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_i \approx c)^{val(\mathfrak{A}, s, x_i \approx c)}$.

v. הפסוק המבוקש הוא:

$$\exists x_1 x_2 x_3 [\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \not\approx x_j \wedge \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq 3} y \approx x_i \wedge \psi_1(x_1, x_2, x_3) \wedge \psi_2(x_1, x_2, x_3) \wedge \psi_3(x_1, x_2, x_3)]$$

(ב) בידיוק כמו ב-(א) אלא שהפעם יש לרשום נוסחאות $\psi_{1,f}$ לכל סימן פונ-קציה (n-מקומי) בשפה וכנ"ל $\psi_{2,r}$ ו-$\psi_{3,c}$ לכל סימן יחס ולכל קבוע אישי בשפה. כעת אם המודל שלנו הוא בן n איברים אז הפסוק המבוקש יהיה:

$$\exists x_1 ... x_n [\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \not\approx x_j \wedge \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq n} y \approx x_i \wedge \bigwedge_{f \in L} \psi_{1,f} \wedge \bigwedge_{r \in L} \psi_{2,r} \wedge \bigwedge_{c \in L} \psi_{3,c}]$$